Logique Floue

I. Truck

Logique Floue : Plan général

- Introduction
- Sous-ensembles flous (SEF)
- Opérations sur SEF
- Relations floues, variables linguistiques, propositions floues
- Raisonnement flou
- Vers la Commande floue

Logique Floue : Bibliographie

- *La logique floue et ses applications*, B. Bouchon-Meunier, Addison Wesley éd., 1995
- *La logique floue*, B. Bouchon-Meunier, Que-sais-je? PUF.
- *The Fuzzy Future : From Society and Science to Heaven in a Chip*, Bart Kosko, Harmony Books.
- *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*, W. Pedrycz & F. Gomide, Mit Press éd.

Logique Floue : Introduction

- Historique
  - Née en 1965 (Lotfi Zadeh, Berkeley)
  - anecdote : créneau en voiture
  - pour Zadeh, simuler donc *modéliser le comportement humain* nécessite:
    - gestion des approximations
    - expérience
- **Logique** floue implique des règles pour obtenir des déductions.
- Ex de règle utilisée quotidiennement implicitement:
  - *si* feu rouge et *si* vitesse_véhicule élevée et *si* feu proche *alors* freinage fort

Logique Floue : Introduction

- Transposition de cette règle sans utiliser le flou:
  - *Si* feu rouge et *si* vitesse_véhicule dépasse 48,3 km/h et *si* feu est à moins de 55,7 mètres *alors* freiner avec une force de 28,9 newtons !!
- => LF formalise le monde en appréciant de façon approximative les *variables d'entrées* (faible, élevée, loin, proche...) et *de sorties* (freinage léger ou fort) et LF édicte un ensemble de règles permettant de déterminer les sorties en fonction des entrées.

Logique Floue : Introduction

- LF: raisonner avec des concepts vagues
- Cadre de la théorie des sous-ensembles flous...
- ... qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques
- LF, extension de la logique classique
  - LC : 2 degrés de vérité Vrai ou Faux
  - LF : plusieurs degrés de vérité
- Formalisation de la représentation et du traitement des connaissances imprécises, imparfaites…

Logique Floue : Introduction

- En théorie des ensembles classiques, un objet **appartient ou n'appartient pas à un ensemble**
  - Ex : U = ensemble des individus; A = ensemble des individus petits
    $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $A \cup \overline{A} = U$
- En théorie des sous-ensembles flous, un objet **peut appartenir à un ensemble et en même temps à son complément**
  - Ex: un individu de 1,66 m peut être considéré à la fois comme grand et petit

Logique Floue : Introduction

- Différence ensembles classiques / ensembles flous
  - Ensemble classique: 1 fonction caractéristique <u>unique</u>
    - Ex. : ensemble des réels compris entre 1 et 3
    - fonction caractéristique : $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  - Ensemble flou: 1 <u>infinité</u> de fonctions d'appartenance
    - ex: ensemble des réels plus ou mois égaux à 2
    - fonction d'appartenance : $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

      $f(x)$ pas unique

Logique Floue : Introduction

- Différence probabilité / flou
  - flou: traitement des imprécisions
  - probabilités: traitement des incertitudes
- Exemple:

A : Il viendra demain à 9h	*B* : Il viendra demain à 9h
$f(A) = 0.8$	$p(B) = 0.8$

=> signification?

Logique Floue : Introduction

- Différence probabilité / flou
  - FLOU :
    - *A* : Il viendra à peu près à 9h (peut-être 8h30, 9h30 ou 10h...)
    - On est sûr qu'il vient mais on ne sait pas *exactement quand*

  => *Imprécision*

  - PROBA :
    - *B* : Il y a 80% de chances pour qu'il vienne
    - On n'est *pas sûr* qu'il vienne

  => *Incertitude*

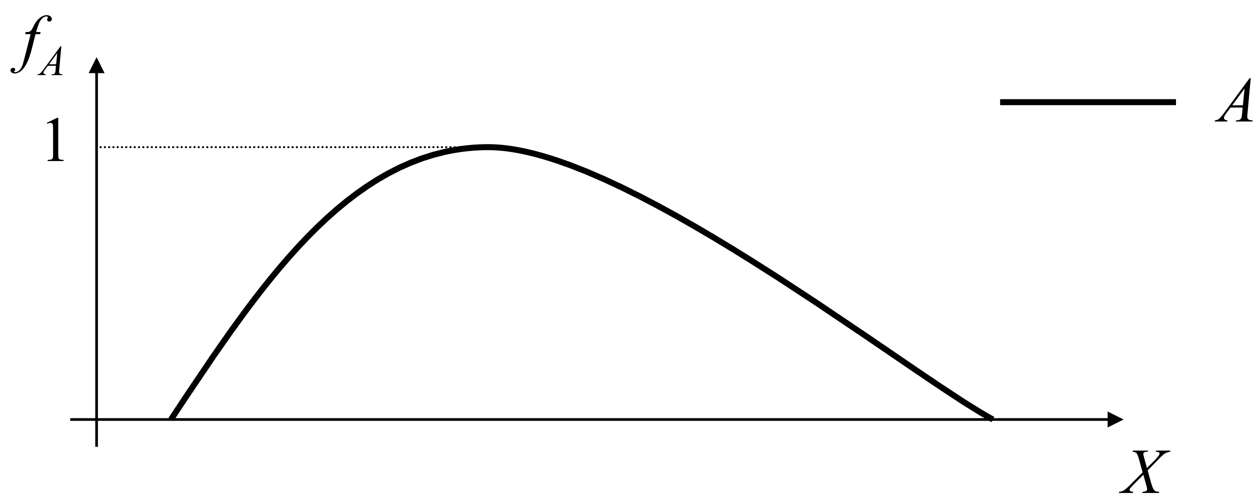
Logique Floue : Introduction

LOGIQUE FLOUE

- Avantages:
  - simple à mettre en œuvre
  - quand il n’existe pas de modèle mathématique, la LF permet l’utilisation d’un modèle empirique (ex: règles de type ‘humain’)
- Inconvénients
  - caractère empirique de ce modèle
  - modèle ou règles peuvent être non précises et dc sources d’erreur => phase de modification des règles

Logique Floue : SEF

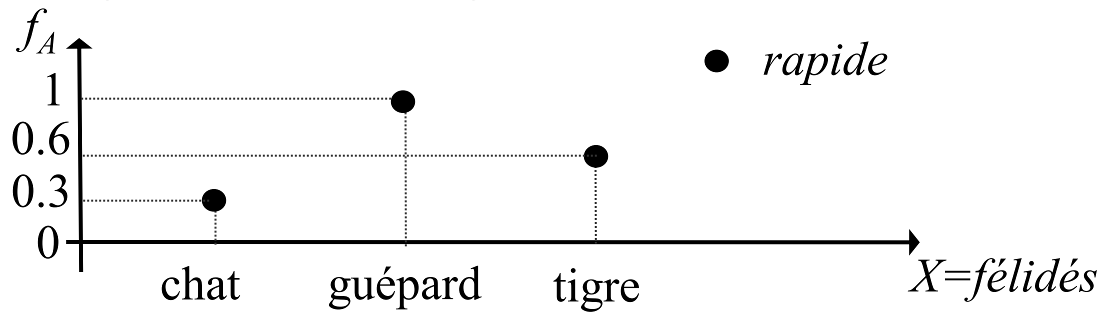
- SEF: sous-ensemble flou $f : X \rightarrow [0,1]$
- Définitions fondamentales:
  - Soit $F(X)$ l'ensemble de tous les SEF de X (ens. de réf.)
  - Soit un SEF $A \in F(X)$. La fonction d'appartenance pour tout $x \in A$ est notée $f_A(x)$.



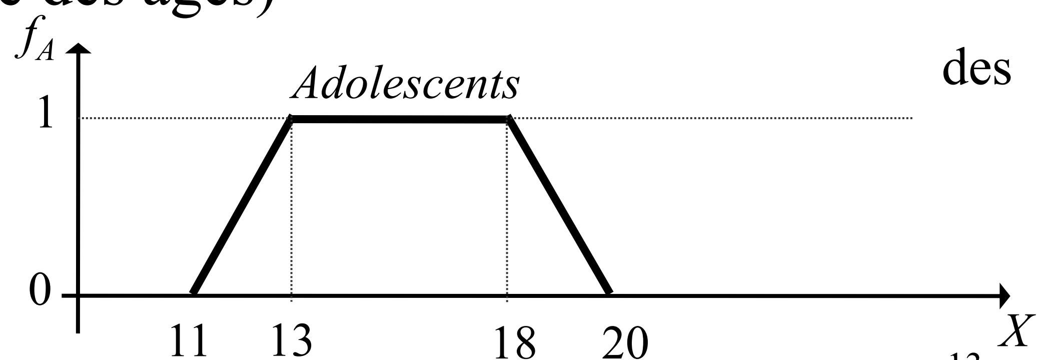
Logique floue => Utilisation de ***fonctions***

Logique Floue : SEF

- Exemples de SEF (X dénombrable et non dénombrable)
  - X={chat,guépard,tigre} (félidés)
    - A: SEF de X des félidés *rapides*
    - A= 0.3 / chat + 1.0 / guépard + 0.6 / tigre



  - X=[0, 110] (ensemble des âges)
    - A: SEF de X des *adolescents*

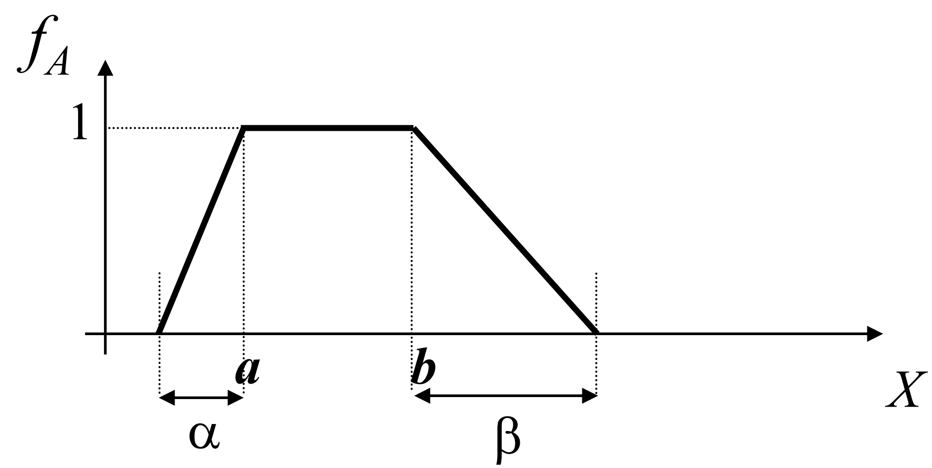


Logique Floue : SEF

- Définitions fondamentales:
  - La **hauteur** $h(A)$ du SEF A de X est la + grande valeur prise par sa fonction d'app : $h(A) = \sup_{x \in X} f_A(x)$
  - Un SEF est dit **normalisé** si sa hauteur vaut 1
  - Le **noyau** Noy(A) correspond à toutes les valeurs x de X pour lesquelles $f_A(x) = 1$
  - Le **support** Supp(A) correspond à toutes les valeurs x de X pour lesquelles $f_A(x) \neq 0$
  - Un **intervalle flou** est un SEF convexe normalisé de R (réels)
  - Un **nombre flou** est un intervalle flou dont le noyau est réduit à un point
  - **Cardinalité** de A : $|A| = \Sigma_{x \in X} f_A(x)$

Logique Floue : SEF

- Définitions fondamentales:
  - Une **quantité floue** est un ensemble flou (normalisé) dans l'univers des nombres réels (c-à-d $X = \mathbb{R}$)
  - Un **intervalle flou de type L-R** (ou SEF **trapézoïdal**) est un int. flou dont la f^n d'app. est définie entièrement grâce à des droites. On le note : (a,b,α,β)



  - Un **nombre flou de type L-R** (ou SEF **triangulaire**) est un intervalle flou de type L-R dont le noyau est réduit à un point. On le note : (a,α,β)

Logique Floue : SEF

- *Exercice* :

  - Soit X l'ensemble des pays suivants: X={Belgique, Suisse, Canada, Tunisie, Algérie, Espagne}, notés respectivement B, S, C, T, A, E.
  - Soit A un SEF de X, correspondant au degré de francophonie des pays considérés:
    $A = 0.5/\mathrm{B} + 0.25/\mathrm{S} + 0.5/\mathrm{C} + 0.6/\mathrm{T} + 0.7/\mathrm{A} + 0/\mathrm{E}$
  - Calculer $h(A)$, Supp(A), Noy(A), $|A|$

Logique Floue : Opérations

- Opérations sur les SEF A et B de X :
  - égalité $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x),\ \forall\ x \in X$
  - inclusion $A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x),\ \forall\ x \in X$
    - A est inclus dans B si sa f^{n} d'appartenance est inférieure à celle de B
  - complément
    - A^C de X est le complément A avec $f_{A^C}(x) = 1 - f_A(x),\ \forall\ x \in X$
  - union $C = A \cup B \Leftrightarrow f_C(x) = \max(f_A(x), f_B(x)),\ \forall\ x \in X$
  - intersection $C = A \cap B \Leftrightarrow f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x)),\ \forall\ x \in X$

Logique Floue : Opérations

- *Exercice*: Démontrer que certaines propriétés de la théorie des ensembles classiques sont vérifiées:
  - $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup X = X, \quad A \cap X = A$
  - *Associativité* de $\cap$ et de $\cup$:
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - *Commutativité* de $\cap$ et de $\cup$:
    - $A \cap B = B \cap A$
    - $A \cup B = B \cup A$
  - *Distributivité* de $\cap$ par rapport à $\cup$:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- => Cf. TD 4

Logique Floue : Opérations

- *Suite exercice*. Démontrer:
  - $(A^c)^c = A$
  - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  $\left.\begin{array}{l} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \end{array}\right\}$ Lois de De Morgan

- Ces propriétés sont-elles vérifiées?
  - $A^c \cap A \overset{?}{=} \emptyset$
  - $A^c \cup A \overset{?}{=} X$

Logique Floue : Opérations

- Pour l'intersection et l'union, les opérateurs choisis sont min et max, mais d'autres sont possibles:
  - L'intersection peut être réalisée en prenant comme opérateur une ***norme triangulaire*** (t-norme)
  - L'union peut être réalisée en prenant comme opérateur une ***conorme triangulaire*** (t-conorme)

- *NB: Les t-normes et t-conormes peuvent servir dans d'autres cas, par exemple, le cas plus général de l'agrégation*

Logique Floue : Opérations

T-norme $\top$

- Soit une fonction $\top$: $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ telle que $\forall x, y, z \in [0,1]$:
  - $\top(x,y) = \top(y,x)$ (commutativité)
  - $\top(x,\top(y,z)) = \top(\top(x,y),z)$ (associativité)
  - $\top(x,y) \leq \top(z,t)$ si $x \leq z$ et $y \leq t$ (monotonie)
  - $\top(x,1) = x$ (1 est élément neutre)

- Exemples de telles fonctions :
  - $\min(x,y)$
  - $x.y$
  - $\max(x+y-1,0)$

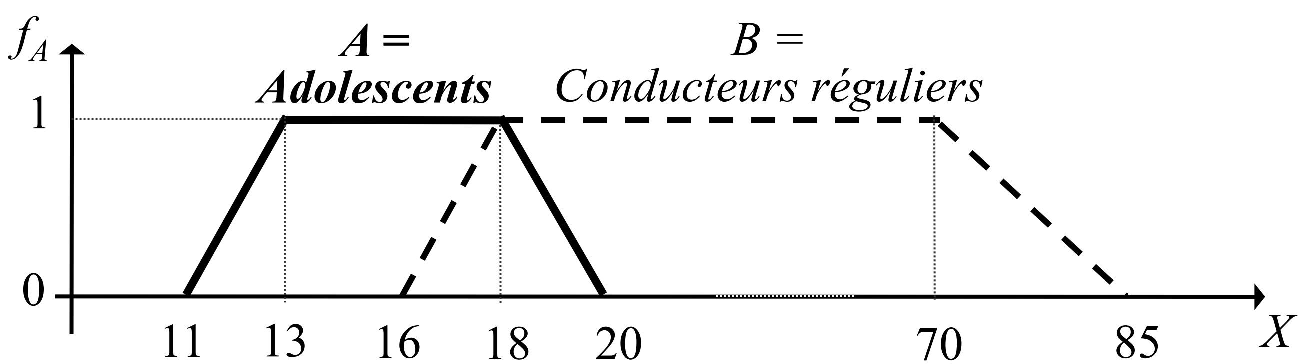
Logique Floue : Opérations

T-conorme $\perp$

- Soit une fonction $\perp : [0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ telle que $\forall x, y, z \in [0,1]$:
  - $\perp(x,y) = \perp(y,x)$ (commutativité)
  - $\perp(x, \perp(y,z)) = \perp(\perp(x,y), z)$ (associativité)
  - $\perp(x,y) \leq \perp(z,t)$ si $x \leq z$ et $y \leq t$ (monotonie)
  - $\perp(x,0) = x$ (0 est élément neutre)
- Exemples de telles fonctions:
  - $\max(x,y)$
  - $x+y - x.y$
  - $\min(x+y, 1)$

Logique Floue : SEF et Opérations

- **Déf.:** Une t-norme et une t-conorme sont **duales** si et seulement si :
  - $1 - \top(x,y) = \bot(1-x, 1-y)$
  - $1 - \bot(x,y) = \top(1-x, 1-y)$
- Cette dualité permet de vérifier les lois de De Morgan
- *Exercice*: montrer que min et max sont duaux
- *Exercice*: $A \cap B$? $A \cup B$?
  - X ={chat,guépard,tigre} (félidés)
    - félidés rapides: A= 0.3 / chat + 1.0 / guépard + 0.6 / tigre
    - grands félidés : B= 0.1 / chat + 0.7 / guépard + 1.0 / tigre
  - X=[0, 110] (ensemble des âges)

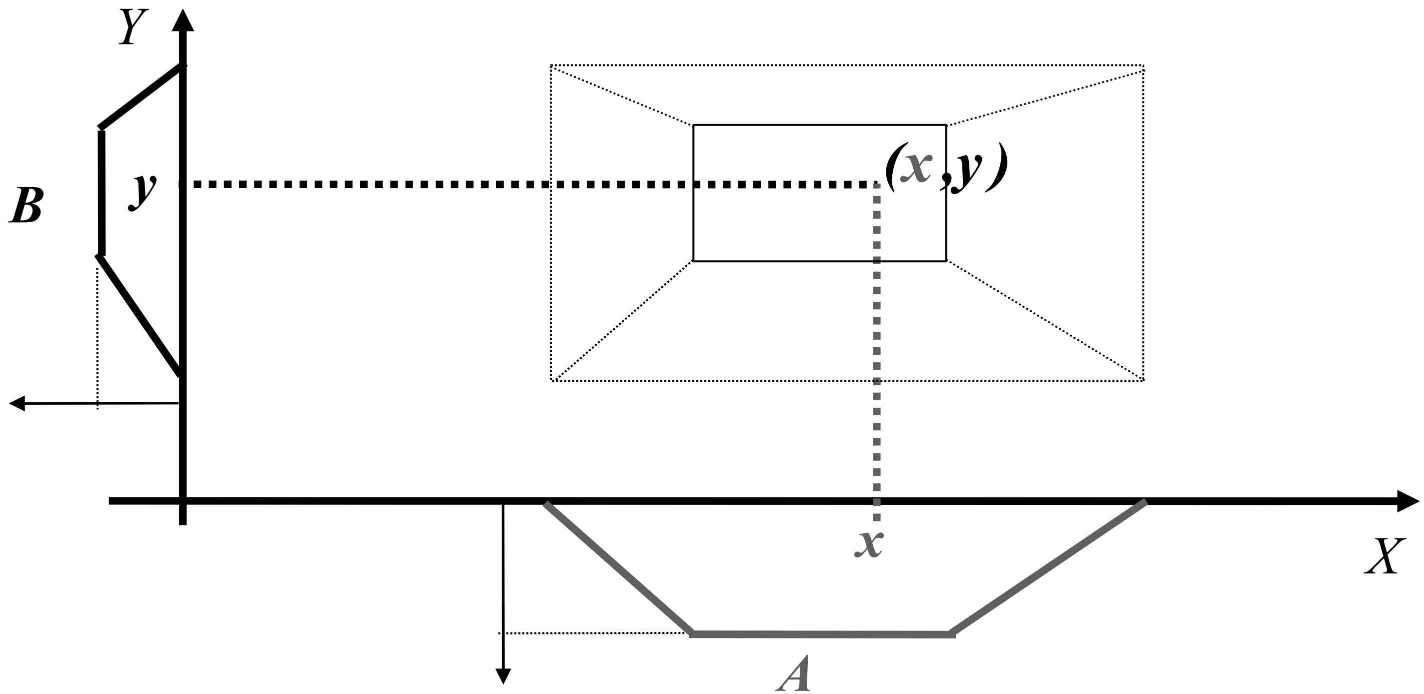


Logique Floue : Opérations

- α-coupes
  - Soit A un SEF de X. Une α-coupe de A est un sous-ensemble classique A_α défini en fonction d'un seuil $\alpha \in [0,1]$ donné :
    - Soit $\alpha \in [0,1]$. $\boldsymbol{A_\alpha = \{x \in X \,/\, f_A(x) \geq \alpha\}}$
  - *Exemple*: Reprendre le SEF A des adolescents et construire les α-coupes de A avec α = 0; 0.6; 1
  - On vérifie que (à faire en exercice):
    - Si $\alpha > \alpha'$ alors $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ et si $B \subseteq A$ alors $B_\alpha \subseteq A_\alpha$
    - $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ et $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
    - $\forall\, x \in X,\ f_{A(x)} = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha\, f_\alpha(x)$ (i.e. on peut reconstruire A à partir de ses α-coupes).
- => cf. TD 5

Logique Floue : Opérations

- Produit cartésien
  - Soient A un SEF de X et B un SEF de Y
  - $C = A \times B$, C est un SEF de $X \times Y = Z$
  - $Soit\ z \in Z.\ f_C(z) = \min(f_A(x), f_B(y)),\ \forall\ x \in X,\ \forall\ y \in Y$



Logique Floue : Opérations

- Produit cartésien (suite)
  - *Exemple*: Soient X_1 un ensemble d'animaux, X_1={chat, guépard, tigre} et X_2 un ensemble de choix de pays par température, X_2={chaud, froid}.

    Le SEF A_1 représente les choix d'un individu quant à l'animal qu'il souhaiterait posséder et le SEF A_2 représente ses choix quant au type de pays dans lequel il souhaiterait vivre:

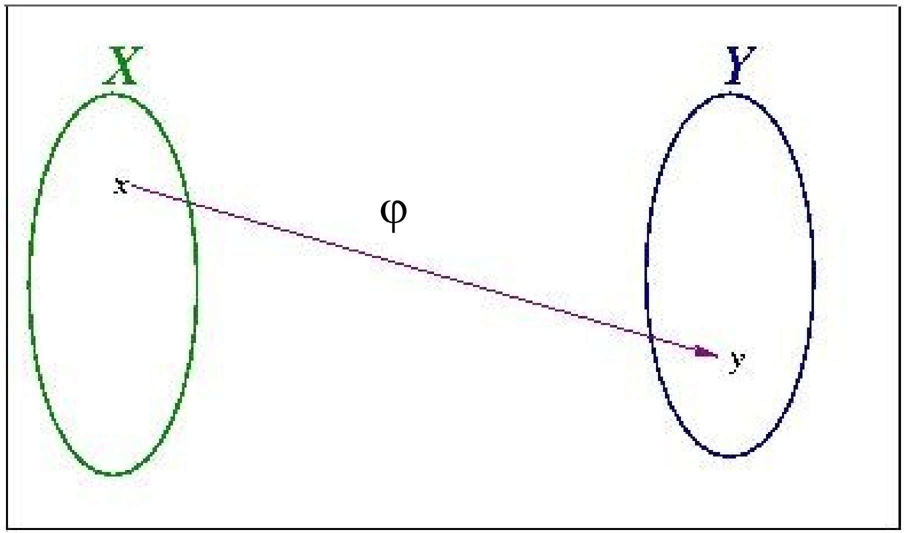
    A_1 = 0.5/chat + 0.8/guépard + 0.3/tigre

    A_2 = 0.9/chaud + 0.1/froid

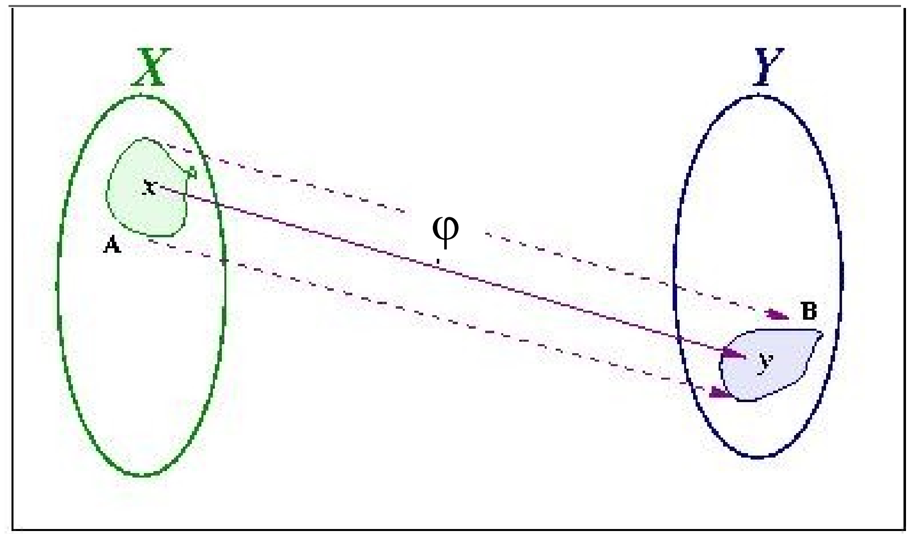
  => Donner la fonction d'appartenance du produit cartésien **(animal à posséder, type de pays souhaité)**

Logique Floue : Opérations

- Principe d'extension



Fonction classique



Fonction étendue

- But: Possédant une fonction sur un univers classique *X*, le principe d'extension permet son utilisation **avec des SEF** de *X*

Logique Floue : Opérations

- Principe d'extension – Suite

  - *Définition*: Étant donné un SEF A de X, et une application φ de X vers Y, le principe d'extension permet de définir un SEF B de Y associé à A par φ :
  - $\forall y \in Y, f_B(y) = \begin{cases} \sup_{\{x \in X \,/\, y = \varphi(x)\}} f_A(x) & \text{si } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Le SEF B est l'image du SEF A par la fonction φ

Logique Floue : Opérations

- Principe d'extension – Exercice
  - X={chat, guépard, tigre, panthère} (*félidés*)
  - Y={rapide, lente, normale} (*mesures des vitesses*)
  - On définit la fonction φ qui associe une vitesse à un félidé: φ(chat) = lente, φ(guépard) = rapide, φ(tigre)= normale, φ(panthère) = normale
  - Nouveau félidé défini de façon floue :
    lion = 0.7/chat + 0.1/tigre + 0.2/panthère
  - Mesure de la vitesse d'un lion ?

Logique Floue : Opérations

- Principe d'extension – Correction exercice
  - φ(chat)=lente, φ(guépard)=rapide, φ(tigre)=normale, φ(panthère)=normale
  - **lion** = 0.7/chat + 0.1/tigre + 0.2/panthère
  - Mesure de la vitesse d'un lion ?
    - f_B(lente) = max(f_{lion}(chat)) = 0.7
    - f_B(normale) = max(f_{lion}(tigre), f_{lion}(panthère))= max(0.1,0.2)=0.2
    - f_B(rapide) = f_{lion}(guépard) = 0

=> le lion est plutôt "lent" mais peut éventuellement atteindre des vitesses "normales"

Logique Floue : Relations floues

- **Relation floue**: généralisation de la notion de relation classique entre 2, 3, … ou *n* ensembles de référence.
- Utilisation des relations floues: par exemple,
  - Permettent de comparer 2 données vagues
  - Permettent de combiner 2 données imprécises dans un calcul...
- Nécessité de l'existence d'un **lien** entre les ensembles de référence
- *Exemple*: Soient X_1 l'ensemble des poids en carats d'une pierre précieuse, X_2, l'ensemble des degrés de perfection de sa taille et X_3, l'ensemble des degrés de pureté. On peut définir une relation $\Re$ sur $X_1 \times X_2 \times X_3$ sur le prix de la pierre.

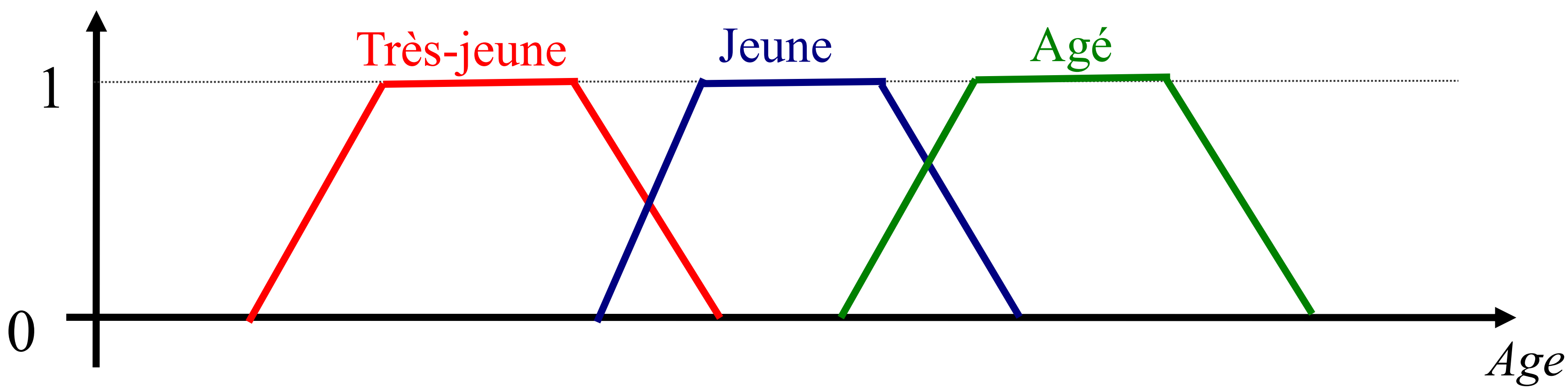
Logique Floue : Relations floues

- <u>*Définition*</u>: Une relation floue $\Re$ entre r ensembles de référence $X_1, X_2, \ldots X_r$ est un SEF de $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$, de fonction d'appartenance $f_\Re$
- *NB: Si on a seulement 2 ensembles de référence, finis, $\Re$ peut être représentée par la matrice des valeurs de sa fonction d'appartenance*
- La composition de 2 relations floues $\Re_1$ sur $X \times Y$ et $\Re_2$ sur $Y \times Z$ définit une relation floue $\Re = \Re_1 \circ \Re_2$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance définie par:

$$\forall (x,z) \in X \times Z \;,\; f_\Re(x,z) = \sup_{y \in Y} \min(f_{\Re_1}(x,y), f_{\Re_2}(y,z))$$

Logique Floue : Variables linguistiques

- Une ***variable linguistique*** est représentée par un triplet (V, X, T_V)
  - V : nom de la variable (âge, taille, température, longueur,...)
  - X : univers des valeurs prises par V (R,...)
  - $T_V = \{A_1, A_2, ...\}$: ensemble de SEF de X_V, utilisés pour caractériser V.
- Par exemple: (Age-Personne, [0,110], {Très-jeune, Jeune, Agé})



Logique Floue: Modificateurs linguistiques

Un *modificateur linguistique* est un opérateur m qui permet de passer d'un SEF A à un autre SEF $m(A)$ dont la fonction d'app. est $f_{m(A)}=t_m(f_A)$ avec t une transformation mathématique.

- Intérêt: pouvoir engendrer des SEF voisins les uns des autres par modification graduelle
- Plusieurs types: renforçants, affaiblissants, … (cf. TD 6)
- m est dit *restrictif* si: $\forall u \in [0,1] \quad t_m(u) \leq u$
- m est dit *expansif* si: $\forall u \in [0,1] \quad t_m(u) \geq u$
- *Exercice:* dessiner des modificateurs restrictifs et expansifs pour un SEF représentant la notion « grand ».

Logique Floue : Propositions floues

- Proposition floue élémentaire : qualification « V est A » d'une variable linguistique (V, X, T_V), où A est un SEF de T_V ou de $M(T_V)$, avec M un modificateur linguistique de T_V
  - *Par exemple:* « Age-personne est jeune » ou « Age-personne est plutôt jeune »
- Proposition floue générale : composition de propositions floues élémentaires de variables linguistiques qui peuvent être distinctes
  - Soient « V est A » p.f.e. de (V, X, T_V), et « W est B » p.f.e. de (W, X, T_W)
  - Exemples de proposition floue générale :
    - « *V* est *A* *et* *W est B* »
    - « *V est A* *ou* *W est B* »

Logique Floue : Propositions floues

- Valeurs de vérité :
  - Proposition classique : valeur de vérité $\in \{0,1\}$ (FAUX ou VRAI)
  - Proposition floue : la valeur de vérité est un SEF à valeurs dans [0,1]
  - Valeur de vérité $\boldsymbol{p_A}$ de « *V* est *A* » : f_A fonction d'appartenance de *A*
  - Valeur de vérité $\boldsymbol{p}$ d'une proposition floue générale : agrégation des valeurs de vérité $\boldsymbol{p_A}$ et $\boldsymbol{p_B}$ de chaque proposition floue élémentaire
    - exemple 1 : « *V est A et W est B* » : $p_{A \wedge B} = min(p_A, p_B)$
    - exemple 2 : « *V est A ou W est B* » : $p_{A \vee B} = max(p_A, p_B)$

Logique Floue : Implications floues

- Implication
  - Logique classique :
    - $p \Rightarrow q$ équivaut à $\neg p \vee q$ on obtient
    la table de vérité suivante :

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

  - Logique floue :
    - Il n'y a pas une seule définition !
    - L'extension de la définition précédente est appelée l'implication de Kleene-Dienes :
      - $A \Rightarrow B$ équivaut à $\max(1 - f_A(x), f_B(y))$

Logique Floue : Implications floues (2)

- **Règle de production** : implication entre 2 propositions floues (p.f.)
  - « V est $A \Rightarrow W$ est B » se lit « **si** V est A **alors** W est B »
  - « V est A » est la ***prémisse***
  - « W est B » est la ***conclusion***
  - Par exemple: « **si** vitesse est rapide **alors** félidé est guépard »
- Une **implication floue** entre 2 p.f. “V est A” et “W est B” est une p.f. (“V est $A \Rightarrow W$ est B”) dont la valeur de vérité est donnée par la fonction d’appartenance $f_{\Re}$ d’une relation floue $\Re$ entre X et Y définie par:

$$\forall\, x \in X, \forall\, y \in Y,\ f_{\Re}(x, y) = \Phi(f_A(x), f_B(y))$$

pour une fonction Φ de $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$

- L’implication floue décrit le ***lien causal*** entre “V est A” et “W est B”.

Logique Floue: Raisonnement

- Il existe bcp d'impl. floues (Kleene-Dienes, Reichenbach, Lukasiewicz…):
  - ex: $\Phi(f_A(x), f_B(y)) = \min(1 - f_A(x) + f_B(y), 1)$ [Lukasiewicz]
  - ex: $\Phi(f_A(x), f_B(y)) = \min(f_A(x),\ f_B(y))$ [Mamdani]

- Modus ponens de la logique classique

Règle:	Prémisse	$\Rightarrow$	Conclusion
Observation:	Prémisse-observée		
Déduction:			Conclusion

- Modus ponens : règle de déduction pour *inférer* de la connaissance

Règle:	H est humain	$\Rightarrow$	H est mortel
Observation:	Socrate est humain		
Déduction:			Socrate est mortel

Logique Floue: Raisonnement

- Modus ponens généralisé : extension du modus ponens aux propositions floues
- Soient (V, X, T_V) et (W, X, T_W) deux variables linguistiques

$$
\begin{array}{llcl}
\textit{Règle floue}: & V \text{ est } A & \Rightarrow & W \text{ est } B \\
 & \quad f_A & & \quad f_B \\
\textit{Observation floue}: & V \text{ est } A' & & \\
 & \quad f_{A'} & & \\
\textit{Déduction}: & & & W \text{ est } B' \\
\hline
 & & & \quad f_{B'}
\end{array}
$$

- f_A f_B et $f_{A'}$ sont connus, on recherche la valeur de $f_{B'}(y)$, $\forall\, y \in Y$

Logique Floue: Raisonnement

- Règle floue « V est $A \Rightarrow W$ est B »
  - Implication floue : $\forall x \in X, \forall\, y \in Y,\ f_{\Re}(x, y) = \Phi(f_A(x), f_B(y))$
- *Le MPG combine la règle floue avec l'observation « V est A' » pour construire la conclusion B'*
- ***Opérateur de modus ponens généralisé*** : fonction $\top$ de $[0,1]\times[0,1]$ dans $[0,1]$ pour combiner $f_{\Re}$ et $f_{A'}$
  - $\top$ *est une t-norme*
  - $\top$ *est **liée** à $f_{\Re}$ pour que le MPG soit compatible avec le MP classique*

    => $\top$ *et $\Re$ doivent être compatibles.*
- On a, pour tout $y \in Y : f_{B'} = sup_{x \in X} \top(f_{\Re}(x,y), f_{A'}(x))$
- Exemple d'opérateur de MPG:

  $\forall\ u,v \in [0,1]\ \ \top(u,v) = \max(u+v-1,0)$ [Lukasiewicz]

Logique Floue: Incertitudes ?

- Théorie des SEF
  - permet de modéliser des connaissances imprécises (« à peu près 8h ») ou vagues (« adolescent »)
  - ne permet pas de manipuler les *incertitudes* (« il viendra peut-être »)
- Or, imprécision et incertitude sont souvent liées:
  - « on est sûr qu'il viendra dans la matinée » mais « on n'est pas sûr qu'il viendra à 8h00 »
  - raisonner avec des données imprécises peut engendrer des résultats avec incertitude

=> **Théorie des possibilités** (Zadeh, 1978, puis Dubois & Prade)

Logique Floue: Applications

- Systèmes experts utilisant le flou
  - ensemble de règles floues + entrées floues + sorties floues
  - système d'inférence
  - pas de défuzzification
  - peut nécessiter un raisonnement par analogie:
    - si l'entrée n'est pas exactement une des prémisses d'une règle
    - => nécessité de calculer une *ressemblance* entre cette entrée et la prémisse pour savoir *comment modifier* la conclusion de la règle

Logique Floue : Applications

- Un exemple d'application du MPG : la **commande floue**

  => ensemble de règles floues + entrée numérique + sortie numérique
- Ce problème comprend 3 étapes :
  - La *quantification floue* des entrées / sorties du système => fuzzification
  - L'*établissement des règles* liant les sorties aux entrées => humain / experts
  - La *combinaison des règles* pour la génération des sorties => MPG et défuzzification

Logique Floue : Commande floue

- Exemples:
  - contrôleur flou : $u=f(x)$ avec u vecteur de sortie du contrôleur et x le vecteur d'entrée
  - conduite automatique d'un véhicule (capteurs flous)
  - gestion des systèmes de ventilation, de régulation thermique...

Commande Floue

I. Truck

Commande Floue : Plan

- Introduction
- bases de la commande floue
  - NON, ET, OU
  - Univers et classes
  - schéma d’une commande floue
- réalisation d’une commande floue
  - structure d’une commande floue
  - cde floue d’un système d’arrosage

Commande Floue : Introduction

- un des buts principaux de l'IA:
  - reproduire et dépasser performance de l'expert
  - possible lorsque données en E/S sont assez précises et modèle pas trop complexe
- Log. Floue => représentation des connaissances imprécises et incertaines
- Commande Floue => prendre une décision, même si on ne peut estimer les E/S qu'à partir de prédicats flous (vagues, avec erreurs…)
- Un intérêt de cde floue: faire entrer l'expert dans le processus

Commande Floue : Introduction

- Commande floue:
  - ni une panacée, ni une utopie
  - mais outil bien adapté à modélisation des phénomènes ne pouvant être que grossièrement décrits
  - *Importance de la* ***méthodologie choisie*** *pour le réglage des paramètres d'un contrôleur flou*

Bases de la commande floue

- Opérateurs NON, ET et OU en commande floue
  - NON => complémentaire : $f_{A^C}(x) = 1 - f_A(x),\ \forall\, x \in X$
  - ET *ex: l'air est froid et le vent est fort*
    - $f_C(z) = \min(f_A(x), f_B(y)),\quad \forall\, x \in X$ *ou, éventuellement :*
    - $f_C(z) = f_A(x) \cdot f_B(y),\quad \forall\, x \in X$
  - OU *ex: l'air est froid ou le vent est fort*
    - $f_C(z) = \max(f_A(x), f_B(y)),\quad \forall\, x \in X$ *ou, éventuellement :*
    - $f_C(z) = f_A(x) + f_B(y) - f_A(x) \cdot f_B(y),\quad \forall\, x \in X$

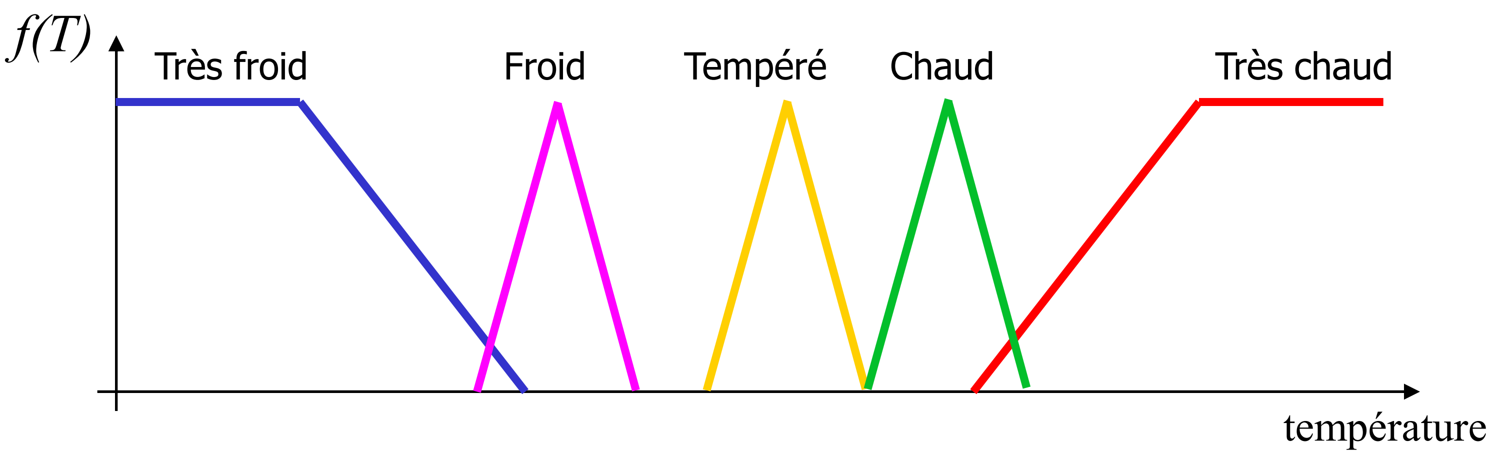
Ces opérateurs sont **duaux** 2 à 2

Bases de la commande floue

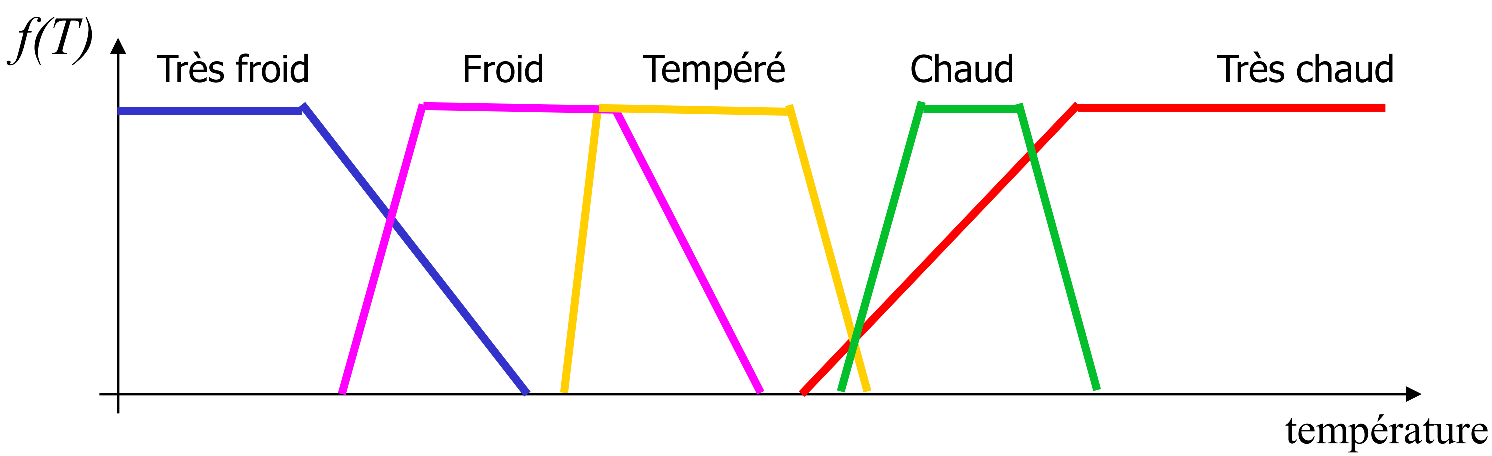
- Univers de discours et classes
  - ens de réf. = univers de discours = domaine de fonctionnement du processus
  - Problème: combien de SEFs sont nécessaires à la commande ? Comment les choisir ?
    - Nbre de SEFs dépend de la façon dont l'expert décrit le psus et de la précision souhaitée
    - En commande, **5 SEFs** est, en général, un bon compromis (ex.: "très froid", "froid", "tempéré", "chaud", "très chaud")
    - intersection de 2 SEFs doit être non nulle (en principe)
    - mais chevauchement ne doit pas être excessif
    - *exemples diapo suivante*

Bases de la commande floue

Chevauchements insuffisants:

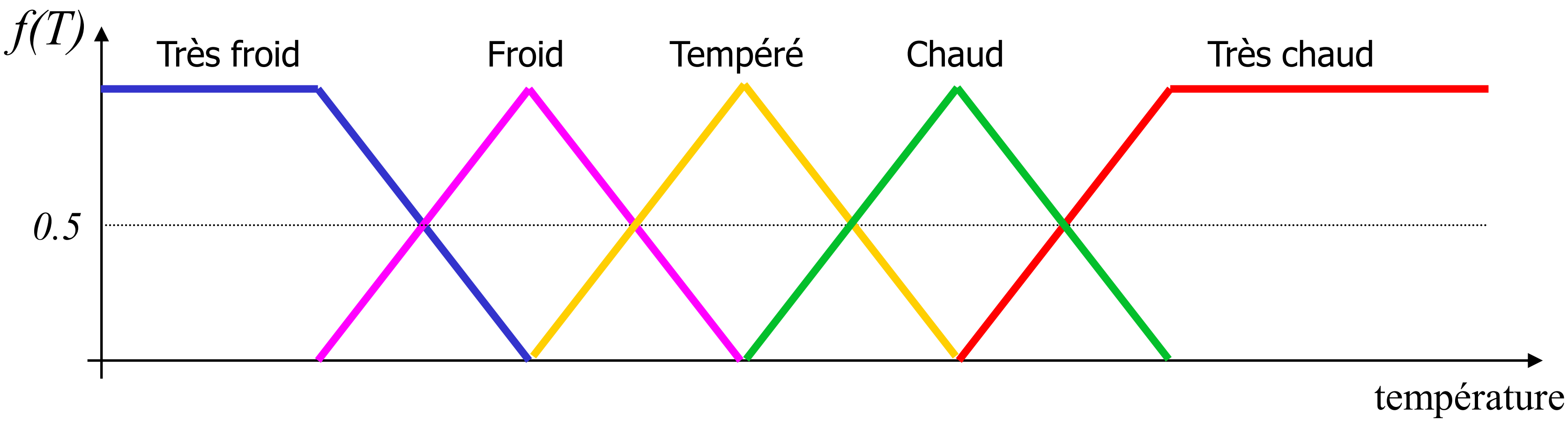


Chevauchements excessifs:



Bases de la commande floue

Bonne répartition des classes :



- schéma d'une commande floue
  - 3 modules
    - traitement des entrées
    - application des règles
    - défuzzification

Bases de la commande floue

- 1er module: traitement des entrées du système
  - définir l’univers (ou les univers) de discours
  - partitionner l’ (les) univers en classes pour chaque entrée
    - ex: Bras articulé qui, en fonction de la température, doit ouvrir une fenêtre. Ici, 2 entrées: température et ouverture. La première est exprimée en °C, la deuxième en cm (2 univers).
  - établir les fonctions d’appartenance de chaque classe
  - étape de ***fuzzification***: consiste à attribuer à la valeur réelle d’une entrée donnée, prise à un temps *t*, sa f^{n} d’app. à chacune des classes préalablement définies

  => *transformation de l’entrée réelle en un SEF*

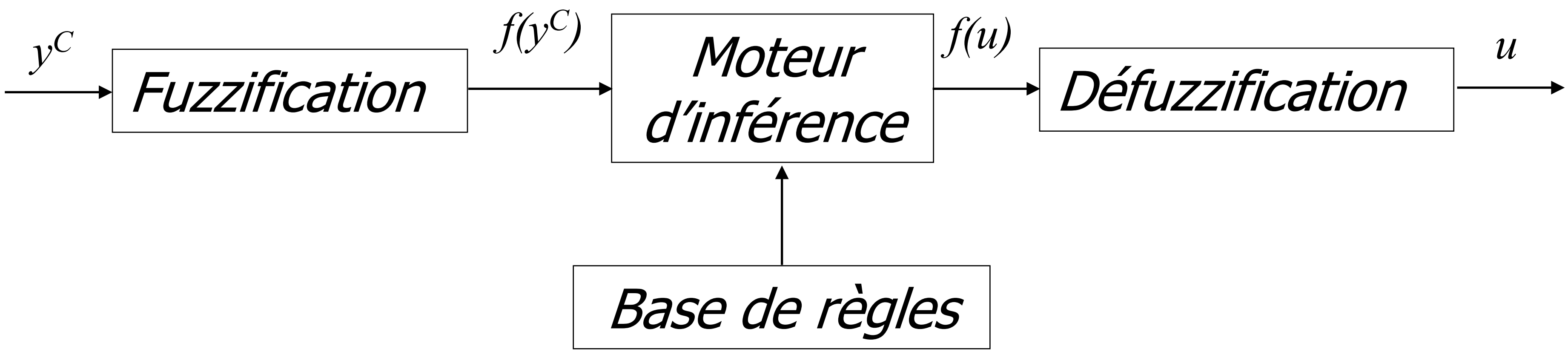
Bases de la commande floue

- 2^e module: application des règles
  - règles du type: "*Si température est élevée, alors ouvrir un peu la fenêtre*"
  - règles permettent de passer d'un degré d'appartenance d'une entrée à une degré d'appartenance d'une commande

  => *module constitué d'une base de règles (définies par l'expert) et d'un moteur d'inférence pour le calcul*
- 3^e module: défuzzification
  - passage d'un degré d'appartenance d'une commande à la détermination de la valeur à donner à cette commande
  - *ex: "ouvrir un peu la fenêtre" signifiera faire subir au bras une rotation d'axe Oy d'angle 12,4°*

Bases de la commande floue

- Schéma de commande (notations usuelles)



- y^C : vecteur des entrées
- u : vecteur des commandes

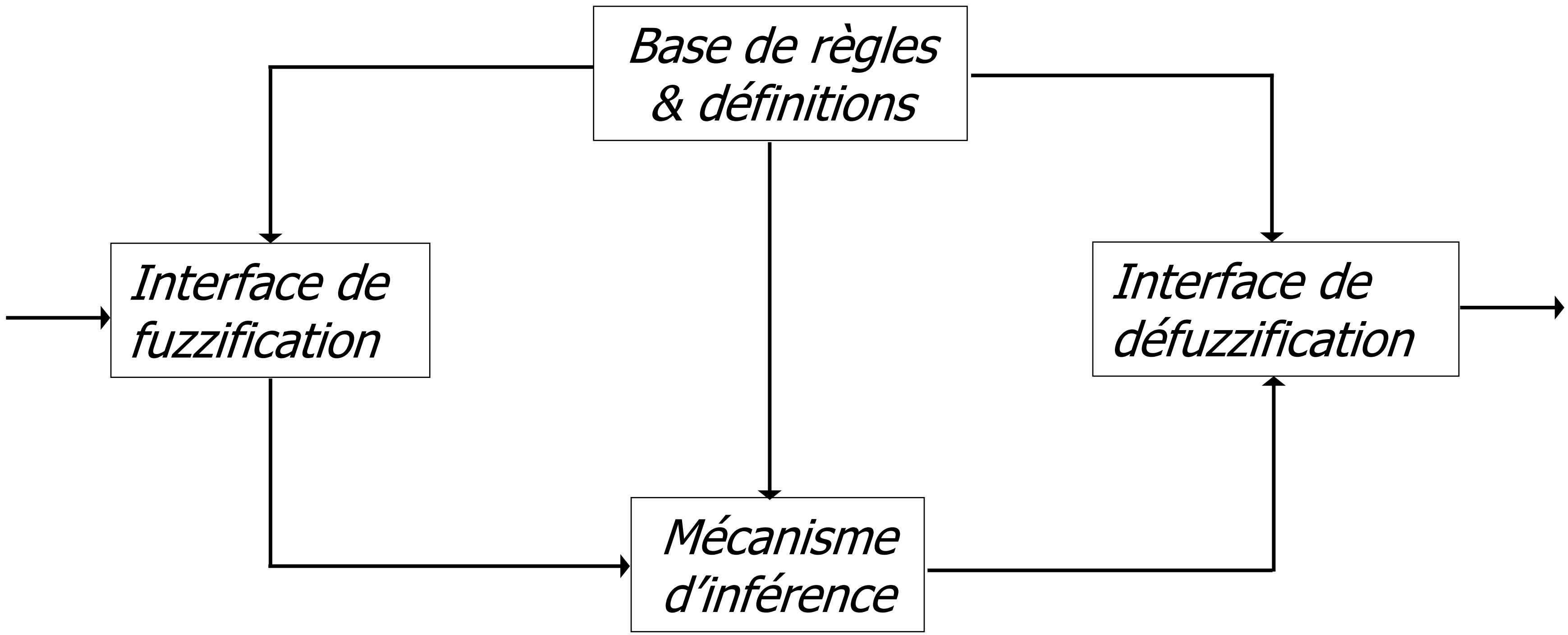
Bases de la commande floue

- Règle floue (RF)
  - règle permettant de passer d'une variable réglante décrite de façon floue à une commande réelle décrite aussi de façon floue
  - une RF transforme un degré d'appartenance en un autre degré d'appartenance
  - *ex: "si la pression est **assez élevée**, ouvrir **un peu** la vanne"*
    - *Soit pression = 2,1 bar*
    - *Degré d'app. de cette valeur au SEF "assez élevé" = 0,7*

    => La RF donne un degré de 0,6 pour le SEF "ouvrir"

Réalisation d’une commande floue

- Structure d’une commande floue

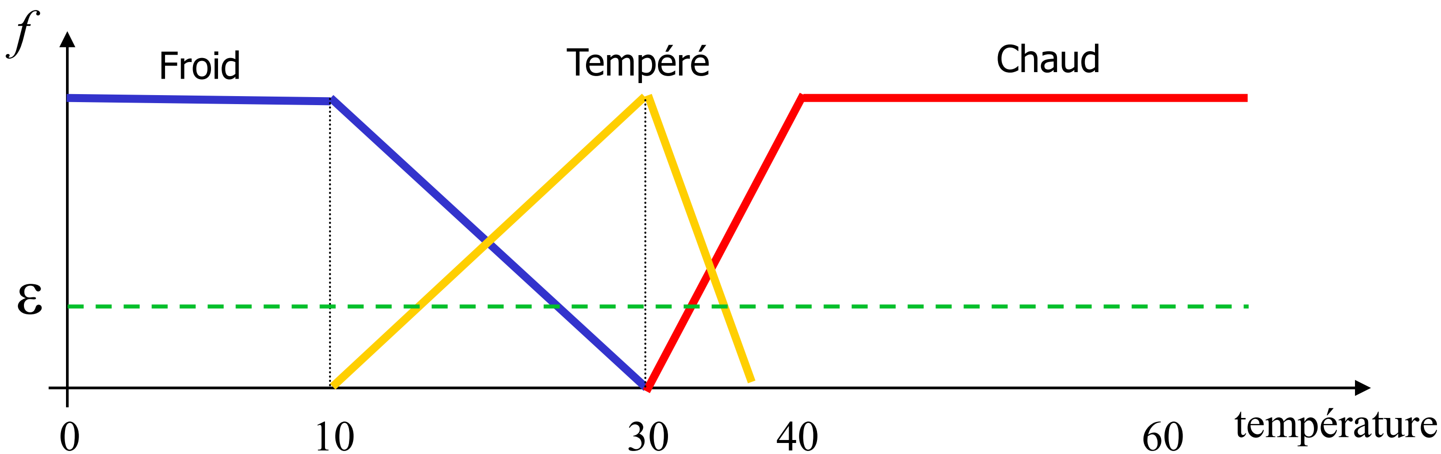


- 4 entités distinctes (développées ds diapos suivantes)

Réalisation d’une commande floue

- Bases de règles et définitions
  - définir l’univers de discours X, la partition floue…
  - partition floue : consiste à définir n SEFs F_i de façon à recouvrir X. Càd que pour tout x de X, il faut assurer une appartenance minimale ε à l’union des SEFs :

$$\forall x \in X, \quad f_{F_1}(x) \vee \ldots \vee f_{F_i}(x) \vee \ldots \vee f_{F_n}(x) \geq \varepsilon$$



  - + le nbre de SEFs ds une partition est important, + il y a de classes, et + la commande est sensible.

Réalisation d’une commande floue

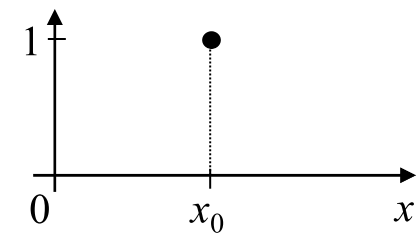
- Bases de règles et définitions (suite)
  - base de règles :
    - caractérise les relations entre les classes d’événements possibles en entrée et les commandes correspondantes
    - syst. de règles doit être *consistant* (non contradictoire !)
    - nombre de règles : soient n le nbre d’univers et m le nbre de classes dans chaque univers. Le *nombre max de règles* est:

$$\prod_{i=1}^{n} m_i$$

    - *NB*: nbre ***maximum*** puisque
      - toutes les possibilités n’ont pas forcément de sens. *Ex: en freinage automatique, la prémisse : “vitesse très élevée ET distance de l’obstacle nulle” n’a pas de sens*
      - certaines configurations (prémisses) mènent à la même conclusion

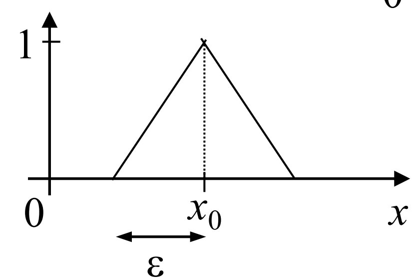
Réalisation d'une commande floue

- Interface de fuzzification
  - => associer à une mesure de la var. x_0 une f^n d'app.
  - Comment choisir l'opérateur de fuzzification ?
    - Si mesure est exacte, précise => *singleton*

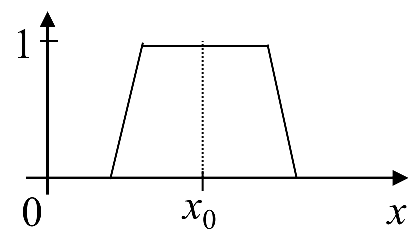


    - sinon, SEF triangulaire

$$f_{x_0}(x) = \max\left[0,\ 1 - \frac{|x - x_0|}{\varepsilon}\right]$$



    - ou trapézoïdal...



Réalisation d'une commande floue

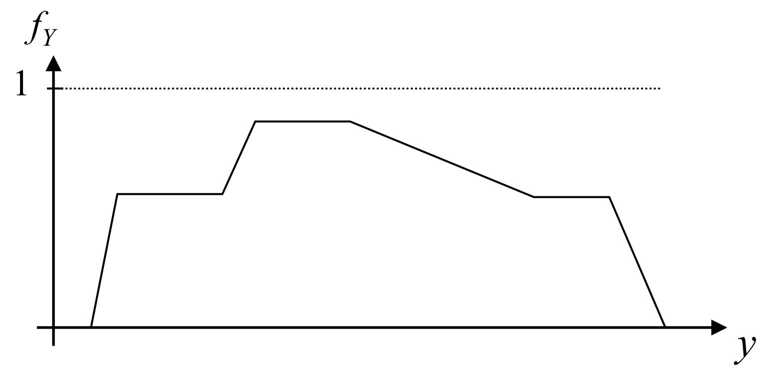
- Mécanisme d'inférence
  - base de règles + SEF X_0 (f^n d'app. de la var. x_0) = SEF Y relatif à la commande
  - Plus précisément, on a m règles de type:
    - $\boldsymbol{R_i}$ **: SI** $\boldsymbol{x_1}$ **est** $\boldsymbol{X_{i,1}}$ **ET … ET** $\boldsymbol{x_n}$ **est** $\boldsymbol{X_{i,n}}$ **ALORS** $\boldsymbol{y}$ **est** $\boldsymbol{Y_i}$
    - avec $X_{i,j}$ le SEF de la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur de mesure des entrées pour la règle R_i
    - et avec Y_i le SEF de la commande pour la règle R_i
  - utilisation de l'opérateur d'inférence sur l'union des m règles

$$f_Y(y) = \sup\left(f_{X_0}(x) \otimes (f_{R_1}(x,y) \vee \ldots \vee f_{R_n}(x,y)) \right)$$

    - avec $f_{R_i}(x,y) = (f_{X_{1,j}}(x_1) \wedge \ldots \wedge f_{X_{n,j}}(x_n)) * f_{Y_i}(y)$
    - et avec $\otimes$ et $*$ des extensions d'intersection, càd $\otimes$: produit cartésien et $*$: implication floue. On peut, par ex., prendre min pour $\otimes$ et $*$

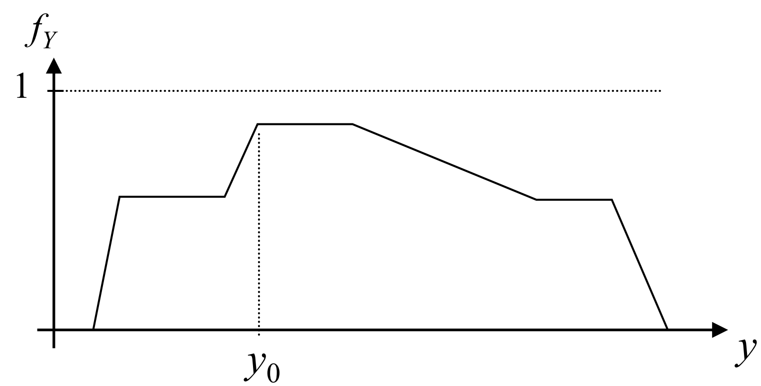
Réalisation d'une commande floue

- Interface de défuzzification
  - SEF résultat => valeur non floue
  - Soit le SEF résultat Y suivant:



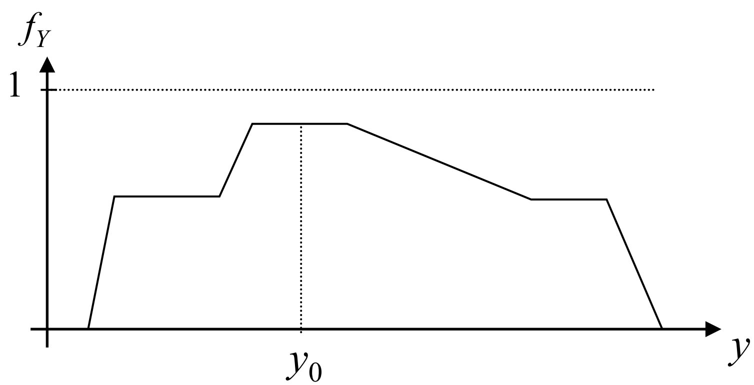
  - 1ère méthode de défuzzification: *principe du maximum*

$D(Y) = y_0 \,/\, f_Y(y_0) = \sup\,(f_Y(y))$



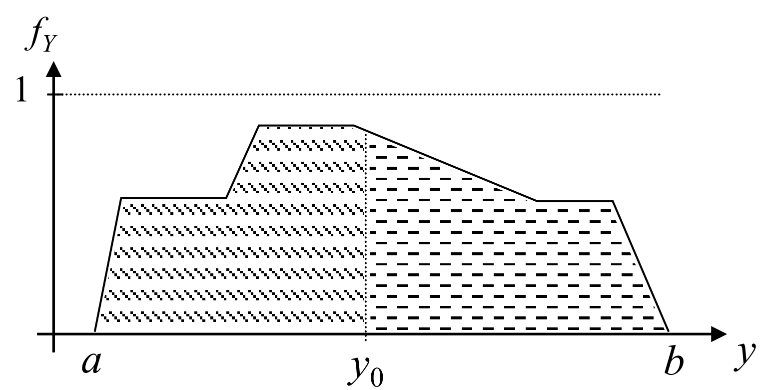
Réalisation d'une commande floue

- $2^{\text{ème}}$ méthode de défuzzification: *moyenne des maxima*



- $3^{\text{ème}}$ méthode de défuzzification: *égalité des intégrales*

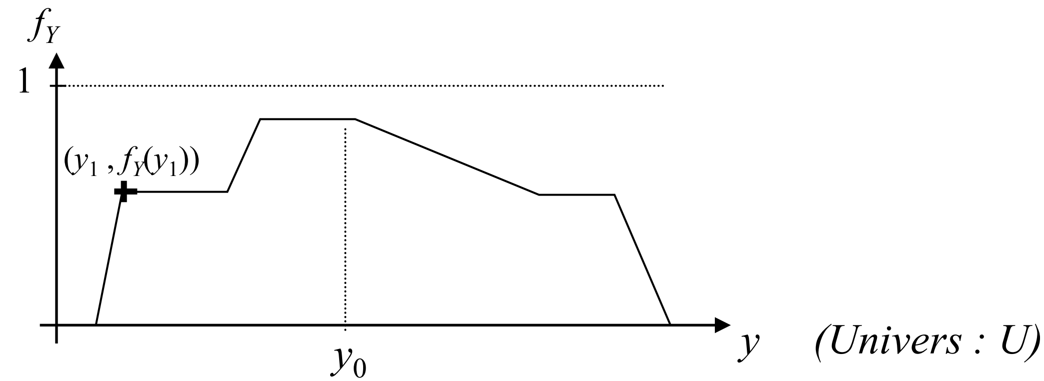
$$D(Y) = y_0 \;/\; \int_a^{y_0} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{b} f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$



Réalisation d'une commande floue

- $4^{\text{ème}}$ méthode de défuzzification: *barycentre*

$$D(Y) = y_0 = \frac{\int_U y . f_Y(y) \mathrm{d}y}{\int_U f_Y(y) \mathrm{d}y}$$



  - si le SEF est composé de η fonctions affines, alors :

$$D(Y) = y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} (y_{i+1} - y_i) \left[(2\, y_{i+1} + y_i) f_Y(y_{i+1}) + (2\, y_i + y_{i+1}) f_Y(y_i) \right]}{3 \sum_{i=1}^{\eta} (y_{i+1} - y_i) \left(f_Y(y_{i+1}) + f_Y(y_i) \right)}$$

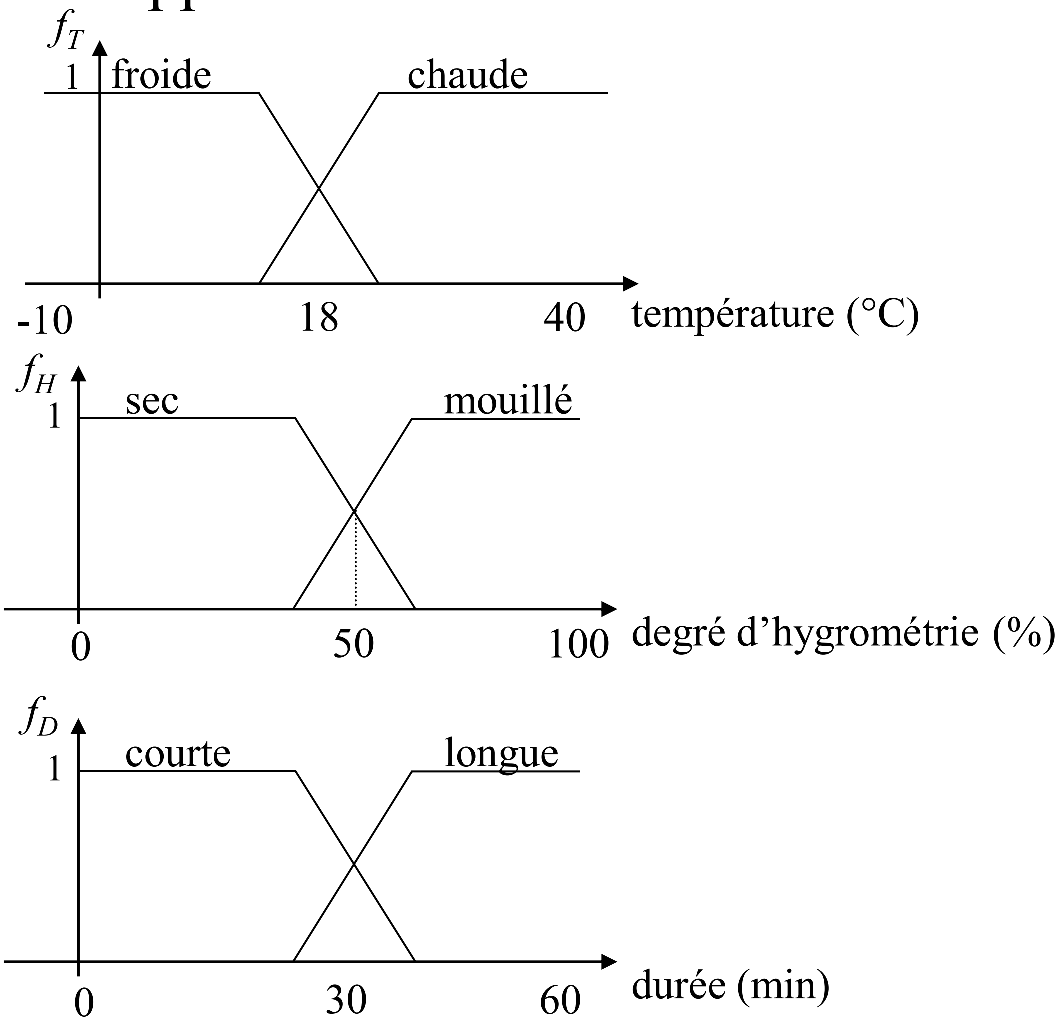
avec $(y_i , f_Y(y_i))$ les coord. des points d'intersection des droites

Réalisation d'une commande floue

- Cde floue d'un système d'arrosage automatique
  - entrées :
    - *température air*
    - *humidité ambiante*
  - sortie : *durée d'arrosage*
  - univers : *températures (U1); degrés d'hygrométrie (U2) ; durées (U3)*
  - classes (simplifiées) :
    - *U1* (t°) : froide, chaude (2 classes pour simplifier)
    - *U2* (degré d'hygrométrie) : sec, mouillé
    - *U3* (durée d'arrosage) : courte, longue

Réalisation d'une commande floue

- Fonctions d'appartenance



Réalisation d'une commande floue

- Règles:
  - R_1 : Si la température est chaude ET le sol sec ALORS la durée d'arrosage est longue
  - R_2 : Si la température est froide ET le sol mouillé ALORS la durée d'arrosage est courte
  - R_3 : Si la température est chaude ET le sol mouillé ALORS la durée d'arrosage est courte
  - R_4 : Si la température est froide ET le sol sec ALORS la durée d'arrosage est longue
- Entrées:
  - mesure de t° : $t_0 = 23°C$
  - mesure d'humidité dans l'air : $h_0 = 42\ \%$
- Fuzzification des entrées
  - mesures des entrées supposées exactes donc *singleton*

Réalisation d'une commande floue

- Construction graphique de la sortie de la commande floue

  1) Pour chaque règle, définir $f_T(t_0)$ et $f_H(h_0)$

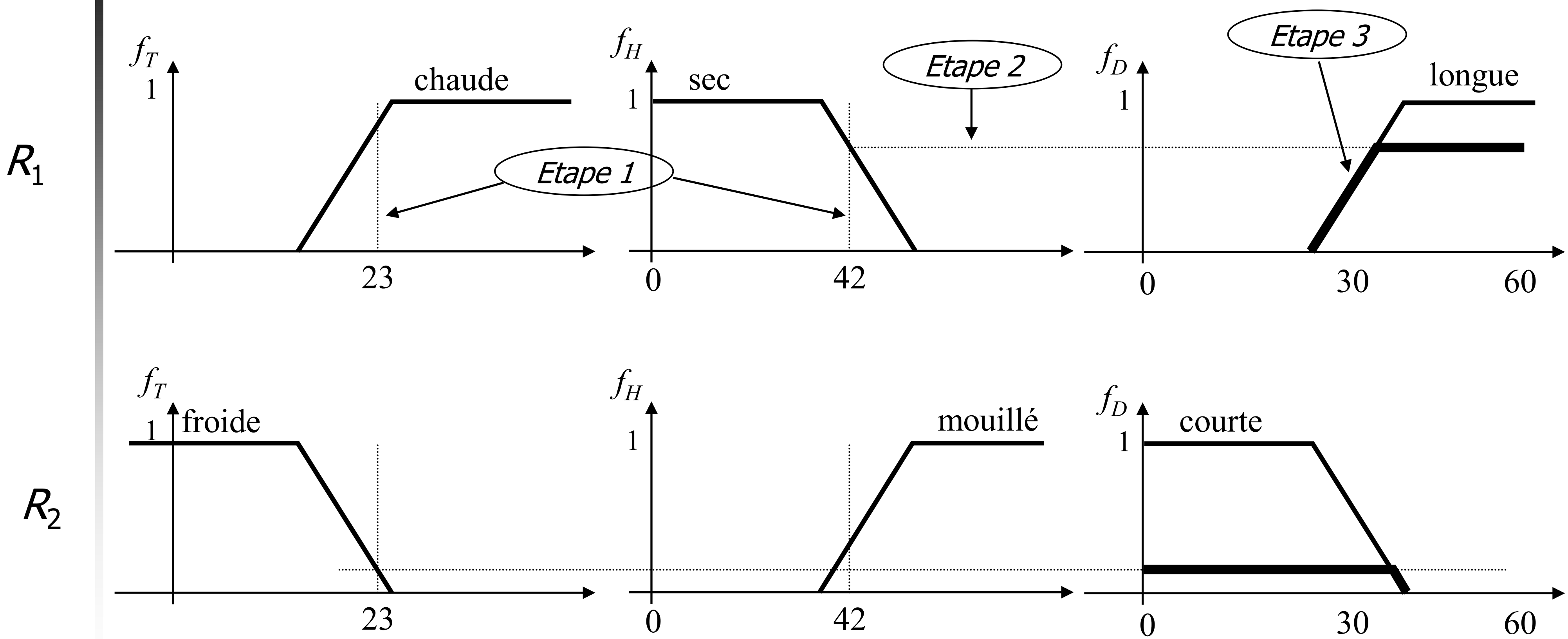
  2) Reporter le minimum des 2 valeurs sur le SEF D de la sortie (opérateur d'intersection: fonction *min*)

  3) construire la cde floue élémentaire de la règle R_i (implication floue et mécanisme d'inférence)

  4) prendre le maximum des solutions élémentaires (agrégation des règles par utilisation de l'opérateur d'union)

  5) défuzzifier le SEF obtenu : obtention de y_0 par égalité des intégrales

Réalisation d'une commande floue



Réalisation d'une commande floue