Logique des propositions et des prédicats

I. Truck, Université Paris 8

Logiques

- Plan général du cours
  - Avant propos
  - Introduction
  - Logique des propositions
  - Logique des prédicats
  - Logiques non classiques
  - Prolog

Avant propos

- D'après Keynes (1883-1946), Logique =
  - science qui recherche les *règles de cohérence* ou de *validité du raisonnement*
  - démarche formelle qui s'intéresse au *traitement de la connaissance* et non à son contenu matériel
- D'après Dopp (1965), Raisonnement =
  - démarche de la pensée qui conduit à une connaissance nvelle à partir d'autres connaissances et *sans apport de nvelles informations*
- Un des intérêts de la logique (ds ce cours): formalisation et représentation des connaissances en IA

Exercices préliminaires:

- Soient 9 billes de même masse, mais l'une d'entre elles est un peu plus légère que les autres. On dispose d'une balance à 2 plateaux et on n'a le droit qu'à 2 pesées. Comment s'y prendre pour trouver la plus légère ?
- On place dans un sac 10 chaussettes blanches et 10 chaussettes noires. Combien de chaussettes faut-il extraire pour être sûr d'obtenir une paire de chaussettes de même couleur ? De couleur différente ? Mêmes questions avec des gants (5 paires de gants blancs et 5 paires de gants noirs).
- Pierre ment lorsqu'il dit qu'il ment. Peut-on alors admettre qu'il dit la vérité ?

Exercices (suite)

- Au cours d'une exploration, Jean découvre une grotte dans laquelle siègent 3 divinités: l'une des 3 est le dieu de la sincérité qui dit tjs la vérité. L'une est le dieu du mensonge qui dit tjs le faux. L'autre est le dieu de la diplomatie qui dit parfois la vérité, parfois le mensonge. Chaque dieu prend la parole:
  - A dit: "B est le dieu de la sincérité"
  - B dit: "je suis le dieu de la diplomatie"
  - C dit: "B est le dieu du mensonge"

  Qui est qui ?
- *Circulation routière.* Il est vrai que moins on est sur la route, moins on a d'accident. Or, plus on roule vite, moins on est sur la route. Peut-on conclure que plus on roule vite, moins on a d'accident?

Introduction

- Parmi les logiques dites “classiques”:
  - logique des propositions
  - logique des prédicats
- logique des propositions :
  - chaque variable représente une proposition

    ex: $\underbrace{\textit{cet appartement vaut 120000 EUR}}_{\textbf{\textit{variable = proposition}}}$
  - pas de $\forall$ ni $\exists$
  - connecteurs autorisés : ET, OU, NON et tous les connecteurs dérivés

Introduction

- logique des prédicats :
  - connecteurs autorisés : ET, OU, NON, etc. + connecteurs universel ∀ et existentiel ∃
  - une proposition est représentée par un *prédicat* nommé et auquel sont associées plusieurs variables
  - ex: $\underbrace{\textit{cet appartement vaut 120000 EUR}}_{\textbf{\textit{proposition}}}$

    peut s'écrire avec 2 prédicats:

    $p(x)$ ou bien $p(a,b)$

<u>prédicat</u>: valeur de *cet* appartement
<u>variable *x*</u>: prix (120000 EUR)

<u>prédicat</u>: valeur d'*un* appartement
<u>variable *a*</u>: identifiant de l'appartement
<u>variable *b*</u>: prix (120000 EUR)

Introduction

- Dans ces 2 logiques (propo. et prédicats), 2 types de théorie:
  - théorie du modèle

empi-
rique

    - utilisation des tables de vérité, ET, OU, NON…
    - on cherche à obtenir des *tautologies*
    - *on manipule des V et F*
  - théorie de la démonstration

formel

    - utilisation d'axiomes, règles de Modus Ponens…
    - on cherche à obtenir des *théorèmes*
    - *on manipule des **formules***

Logique des propositions

- Plan
  - Introduction
  - Méthode des tables de vérité
  - Syllogismes non catégoriques
  - Equivalences fondamentales
  - Méthode des graphes
  - Méthode axiomatique
  - Algèbre de Boole

Logique des propositions

- Introduction
  - **proposition**: énoncé déclaratif à *une* valeur de vérité: V ou F, valeurs qui s'excluent mutuellement
  - **variable propositionnelle** (v.p.) : permet de représenter la proposition. Ex: p
  - **connecteur** : opérateur (unaire, binaire…). Ex: $\neg$
  - **formule**: ensemble de v.p. reliées par des connecteurs. Ex: $(p \Leftrightarrow q) \wedge \neg r$

Logique des propositions

- Méthode des tables de vérité
  - **fonction affirmation** : “il est vrai que p”
    => pas de symbole, seulement : p
  - **fonction négation** : “il est faux que p”
    => symbole: $\neg$ ou $\sim$ ou “barre” ($\bar{p}$)
  - **fonction conjonction** : “p et q”=> symbole $\wedge$
  - **fonction disjonction** : 2 acceptions possibles
    - ou inclusif : $\vee$
    - ou exclusif (ou linguistique) : $\underline{\vee}$

Logique des propositions

- Méthode des tables de vérité (suite)
  - **fonction incompatibilité** : $p \mid q$ signifie que p et q ne peuvent être vrais ensemble
  - **fonction équivalence :** $p \Leftrightarrow q$ signifie que p et q ont la même valeur de vérité
  - **fonction implication :** $p \Rightarrow q$ signifie que **si *p* alors *q***

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

LP: Méthode tables de vérité

- Nota Bene
  - tautologie: formule tjs vraie
  - antilogie: formule tjs fausse
- Evaluation des fonctions de vérité
  - exple: $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee \neg q) \wedge p)]$?
- Quelques tautologies:
  - $p \vee \neg p$ (tiers exclu)
  - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow m)] \Rightarrow (p \Rightarrow m)$ (transitivité de l'implication)
  - $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (commutativité de l'équivalence)
  - $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$ (réfutation par l'absurde)

LP: Méthode tables de vérité

- Quelques tautologies (suite):
  - $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$ (dilemme)
  - $\neg (p \wedge \neg p)$ (principe de non contradiction)
  - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee m)]$ (atténuation d'un conséquent)
  - $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (idempotence de la conjonction)
  - $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$ (à démontrer avec table de vérité)
  - $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$
- Evaluer:
  - $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
  - $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
  - $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$

Logique des propositions

- méth. avec syllogisme (*raisonnement composé de plusieurs jugements*)
  - syll. hypothétique avec implication:
    - *ex*: Si Pierre parle, il existe

      Or Pierre parle

      Donc il existe
    - 2 formes:
      - modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

si p alors q
or p
donc q

      - modus tollens

$$\frac{\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

si p alors q
or non q
donc non p

LP: méthode avec syllogisme

- syllogisme hypothétique avec équivalence:
  - 2 formes:
    - modus ponens

$$\frac{p \Leftrightarrow q \qquad p}{q} \qquad\qquad \frac{p \Leftrightarrow q \qquad q}{p}$$

    - modus tollens

$$\frac{p \Leftrightarrow q \qquad \neg p}{\neg q} \qquad\qquad \frac{p \Leftrightarrow q \qquad \neg q}{\neg p}$$

- Exercices: traduire en langage symbolique
  - C’est très cher si c’est en or

    c = être très cher ; o = être en or ; $o \Rightarrow c$ *(Implication)*

  - Pour que cette enveloppe ait été ouverte, il est nécessaire que Jean en ait été informé, à moins que Pierre ait oublié de la coller

Logique des propositions

- Qq équivalences et propriétés fondamentales
  - lois de De Morgan
    - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
    - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  - $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$
  - $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  - $(p \vee\!\vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
  - commutativité de la conjonction et disjonction :
    - $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
    - $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
  - associativité de la conj. et disj.

LP: Equivalences fondamentales

- distributivité de conj. par rapport à disj. et vice versa
- idempotence : $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$; $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
- absorption : $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$; $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

- FNC Forme normale conjonctive

  = conjonction de disjonctions
  ex: $(p \vee \neg q) \wedge \neg\, m \wedge (p \vee r)$

- FND Forme normale disjonctive

  = disjonction de conjonctions
  ex: $(p \wedge \neg q) \vee \neg\, m \vee (p \wedge r)$

Logique des propositions

- méthode des graphes
  - consiste à examiner de manière systématique toutes les éventualités qui pourraient rendre la fonction fausse (recherche de contre-exemples) ou, éventuellement, la rendre vraie
  - but: déterminer le “statut logique” de la proposition: tautologie ? antilogie? … ?
  - Décomposition d’une fonction fausse:
    - *ex 1*: (F) $p \vee\!\!\vee q$

(V) p (F) p
(V) q (F) q

On dit alors:
p VRAI et q VRAI ou bien
p FAUX et q FAUX

LP: Méthode des graphes

- *ex 2*:

$$\begin{array}{ccc} & (F)\ p \wedge q & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ (V)\ p & (F)\ p & (F)\ p \\ (F)\ q & (V)\ q & (F)\ q \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc} & (F)\ p \wedge q & \\ \swarrow & & \searrow \\ (F)\ p & & (F)\ q \end{array}$$

- *Explication*: “Pour que p∧q soit faux, *il faut et il suffit que* p soit faux *ou bien* que q soit faux *ou bien* que (p soit faux *et* q soit faux)” ➔ $\neg p \vee \neg q \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (loi d’absorption)

- Décomposition d’une fonction vraie
  - *exemples*:

$$\begin{array}{ccc} & (V)\ p \vee q & \\ \swarrow & & \searrow \\ (V)\ p & & (V)\ q \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc} & (V)\ p \vee\!\vee\ q & \\ \swarrow & & \searrow \\ (V)\ p & & (F)\ p \\ (F)\ q & & (V)\ q \end{array}$$

Logique des propositions

- méthode axiomatique
  - ~~notion de vérité~~ => notion de **validité**
  - *expression bien formée*
    - *exemples OK* : p ; $\neg$q ; (p$\Rightarrow$q) ; ($\neg$p$\vee$q) ; …
    - *exemples !OK* : ($\neg \Rightarrow$ p) ; pq ; …
  - *expression valide* = expression bien formée tjs vraie
    - règle de substitution
      - Exple: soit l'expression valide (p$\vee$q) $\Rightarrow$ (q$\vee$p)

        (p$\vee$ m) $\Rightarrow$ (m$\vee$p) est aussi une expr. valide

        ((p$\wedge$m)$\vee$q) $\Rightarrow$ (q$\vee$(p$\wedge$m)) est aussi une expr. valide

LP: méthode axiomatique

- règle de détachement (Modus Ponens)
  - ***exple***: si $(p \vee \neg p)$ est une expr. valide

    et $(p \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ est une expr. valide

    alors $(p \Rightarrow p)$ est une expr. valide

- but de la méth. axiomatique : *retrouver toutes les expressions valides* d'un système à partir de quelques axiomes posés au départ. ***C'est le côté formel, non empirique de la démonstration en logique***
  - système d'axiomes de Lukasiewicz (1929) :

    1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow m) \Rightarrow (p \Rightarrow m)]$
    2. $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
    3. $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$

  Toutes les expressions classiques de la logique en dérivent !

Logique des propositions

  - Un syst. d'axiomes est *consistant* si on ne peut déduire à la fois une expression et sa négation.
  - Il est dit *inconsistant* dans le cas contraire.
- *Exercice*: Démontrer, à l'aide du système d'axiomes de Lukasiewicz et des règles de substitution et détachement, le théorème suivant : $p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow p)$

- Algèbre de Boole
  - Ici, on parle plutôt de *classe* (= collection d'éléments bien définis)
  - *Exple*: soit le prédicat: "le chat est un animal" => Il signifie : "le chat est un élément de la classe animal"

LP: Algèbre de Boole

- Notions d'égalité, d'inclusion, d'intersection, … de réunion des classes
- La classe vide correspond au résultat de l'intersection de deux classes disjointes
  - Notée $\varnothing$
  - $A \cap \neg A = \varnothing$
- Univers du discours: ensemble global ds lequel sont situées les classes
  - Noté U
  - $A \cup \neg A = U$
- Notions de *variables booléennes* qui appartiennent aux classes (plutôt appelées *sous-ensembles*)

LP: Algèbre de Boole

- *Exercice* : traduire en schémas d’ensembles (diagrammes)
  - Tous les hommes sont mortels
  - Aucun ange n’est mortel
  - Certains animaux sont marrons

Logique

- logique des prédicats
  - logique binaire (comme celle des propositions)
  - limitation (ds le cadre de ce cours) à la ***logique du 1er ordre***
    - 1er ordre = les quantificateurs concernent les *objets* et non les prédicats
  - vocabulaire:
    - variables pour objets: *variables liées* x, y, z…
    - variables pour prédicats: P, Q, R…
    - variables pour individus concrets: *variables libres* a, b, c…

“famille” d’objets (nom générique)

on nomme l’objet (expressément)

Logique des prédicats

- Px signifie : “x est P”
  “x vérifie le prédicat P”
- $\neg$ Px signifie : “x n’est pas P”
- Les prédicats (ou propositions)
  - sont connectés par les opérateurs usuels ($\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\neg$ …)
  - mais dépendent aussi d’autres opérateurs:
    - quantificateur universel $\forall$ (*quel que soit*)
    - quantificateur existentiel $\exists$ (*il existe*)
- Exemples:
  - Tout P est Q : $\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)$
    l’implication marque un lien de nécessité

Logique des prédicats

- Exemples (suite)
  - Aucun P n'est Q : $\forall x\ (Px \Rightarrow \neg Qx)$
  - Quelque P est Q : $\exists x\ (Px \wedge Qx)$

    On n'utilise pas d'implication car il n'y a pas de lien de nécessité entre P et Q
  - $\exists x\ (Px \Rightarrow Qx)$ signifie : il y a au moins un objet x qui ne peut être P sans être Q
- Tautologies
  - Notées $\models$
  - $\models \forall x\ Px \Rightarrow \exists x\ Px$
  - $\models \forall x\ (Px \vee \neg Px)$

Logique des prédicats

- Tautologies (suite)
  - $\models \forall x\ (Px \wedge Qx) \Leftrightarrow (\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx)$
  - $\models \exists x\ (Px \wedge Qx) \Rightarrow (\exists x\ Px \wedge \exists x\ Qx)$
  - Une négation traverse un quantificateur en l'inversant (généralisation des lois de De Morgan) :

    $\models \neg\forall x\ Px \Leftrightarrow \exists x\ \neg Px$

    Plus généralement,

    $\models \forall x\ Px \Leftrightarrow \neg\exists x\ \neg Px$

    $\models \exists x\ Px \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg Px$
- ***NB: Prolog est le langage de la mise en pratique de la logique des prédicats***

Logique des prédicats

- Analyse des propositions:
  - poser la proposition comme fausse
  - décomposer ss forme de graphes
  - => idem méth. des graphes mais besoin de règles pour éliminer les quantificateurs
  - 4 situations possibles (F) $\forall x$; (V) $\exists x$; (V) $\forall x$; (F) $\exists x$
- Exemple de résolution d'un cas:
  - (F) $\forall x\ Px$: Pour que $\forall x\ Px$ soit faux, il suffit de trouver un x (noté a) qui ne vérifie pas P. Cela donne (F) Pa

Logiques non classiques

- logiques classiques
  - reposent sur 3 principes :
    - identité : $p \Rightarrow p$ ou $p \Leftrightarrow p$
    - tiers-exclus : $\neg p \vee p$
    - non-contradiction : $\neg(p \wedge \neg p)$
  - = logiques binaires (VRAI ou FAUX)
  - semblaient réductrices et inadaptées pour modéliser certains concepts typiquement humains
  - au cours du 20° siècle, auteurs proposent de nouvelles logiques dans 4 directions principalement

Logiques non classiques

- 4 “familles” de logiques non classiques
  - logique modale
  - logiques plurivalentes
  - logiques affaiblies
  - logiques spécifiques
- logique modale : utilise les notions de nécessité et de possibilité
- logiques affaiblies, spécifiques, plurivalentes : utilisent d’autres valeurs que VRAI et FAUX

Logiques non classiques

- logiques plurivalentes (suite)
  - logique trivalente de Lukasiewicz (1920)
    - VRAI (valeur: 1), FAUX (val.:0), NEUTRE (val.:1/2)
    - *ex*: “Paul ira au cinéma demain” est une proposition NEUTRE
    - redéfinition des tables de vérité de $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
    - les principes de la logique classique ne sont plus vérifiés
  - logique “probabiliste” de Reichenbach (1934)
    - VRAI + FAUX + une infinité de valeurs
    - valeurs de vérité sont des fractions entre 0 et 1

Logiques non classiques

- logique “probabiliste” (suite)
  - 4 lois proposées par Lukasiewicz pour les val. de vérité:
    - négation $\neg p = 1 - p$
    - implication: si $p \leq q$, $p \Rightarrow q = 1$
      si $p > q$, $p \Rightarrow q = 1 - p + q$
    - conjonction: valeur de la composante la + faible
    - disjonction: valeur de la composante la + forte
- logique floue
  - une autre logique multivalente, à la mode, plus répandue
  - utilise des fonctions d’appartenance pour définir le degré de vérité de l’appartenance d’un objet à un concept
  - ces fonctions d’appartenance ne sont pas uniques
  - le raisonnement par modus ponens devient un raisonnement approximatif => *modus ponens généralisé*